ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia 2º semestre, 1ª Prova Intercalar 27. 03. 17

1horas. (20 valores)

Nome:____Turma:_________

Espaço reservado para classificações				
1. a) (35)	2a.(10)	*3a.(30)*	*3* c.(30) *T:*	
1. b) (20)	2b.(25)	3 b.(20)	*4. (30)*	P:

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.
As questões de resposta múltipla erradas tem uma penalização de 5 pontos

1. Na fábrica Electra, Lda, após a produção, os componentes electrónicos são sujeitos a testes de qualidade e classificados em três categorias A, B e C por ordem decrescente de qualidade. Sabe-se que 70% dos componentes produzidos são de classe A, 18% de classe b e 12% de classe C. Sabe-se ainda que a percentagem de componentes que falham durante o primeiro ano de utilização, é de 2%, 10% e 18% respectivamente para os componentes classificados nas categorias A, B e C.

a) Um componente falhou durante o primeiro ano de utilização. Qual a probabilidade de que este componente tenha sido classificado como sendo de classe B?

F - componente falhar durante o primeiro ano de utilização

$$P(A) = 0.7, P(B) = 0.18\,, P(C) = 0.12, P(F|A) = 0.02, P(F|B) = 0.1, P(F|C) = 0.18$$

$$P(B|F) = \frac{P(F|B) * \ P(B)}{P(F|A) * \ P(A) + P(F|B) * \ P(B) + P(F|C) * \ P(C)}$$

$$= \frac{0.1 * 0.18}{0.02 * 0.7 + 0.1 * 0.18 + 0.12 * 0.18} = 0.3358$$

b) Seleccionados ao acaso e sequencialmente 5 componentes electrónicos da produção desta fábrica, qual a probabilidade de os três primeiros serem de classe B e os restantes não serem dessa classe.

i) $\frac{3}{5}$ ☐ ii) 0.3087 ☐ iii) 0.0039 X iv) 0.0392 ☐

2. Considere uma variável aleatória X cuja função probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \frac{x^2}{c},\ x = -2, -1, 1, 2 \quad \text{onde } c > 0 \text{ é uma constante}$$

a) Então podemos afirmar que :

ii) X é contínua ☐ ii) $c = \frac{1}{10}$ ☐ iii) $Var(X) = E(X^2)$ X iv) $P(X > 2) > 0$ ☐

b) Calcule $P(X \leq 1 |\, X > -1)$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.4 & -2 \leq x < -1 \\ 0.5 & -1 \leq x < 1 \\ 0.6 & 1 \leq x < -2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$P(X \leq 1 |\, X > -1) = \frac{P(-1 < X \leq 1)}{P(X > -1)}$$

$$= \frac{F_X(1) - F_X(-1)}{1 - F_X(-1)} = \frac{0.6 - 0.5}{1 - 0.5}$$

$$= 0.2$$

3. Seja X uma variável aleatória com função densidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2/3 & 0 < x < 1 \\ \frac{2}{9}x & 1 < x < 2 \end{cases}$$

a) Determine a função distribuição.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x 2/3\, dx & 0 < x < 1 \\ \int_0^1 2/3\, dx + \int_1^x \frac{2}{9} x dx & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{2}{3}x & 0 < x < 1 \\ \frac{5 + x^2}{9} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

b) Calcule $P\left(X \geq \frac{3}{4}\right)$.

☐ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ X ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{1}{3}$

c) Seja a variável aleatória $Y = \begin{cases} 0 & X \leq 1 \\ \frac{X}{3} & X > 1 \end{cases}$. Determine a função distribuição da variável aleatória Y e classifique a variável aleatória.

$$D_Y = \{0\} \Rightarrow A_0 = \{x: y = 0\} = \{x \leq 1\} \Rightarrow P(Y = 0) = P(X \leq 1) = \frac{2}{3}$$

Para valores de $X > 1$, vem $0 < Y < \frac{2}{3}$ e:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X}{3} \leq y\right) = P(X \leq 3y) = F_X(3y) = \frac{5 + (3y)^2}{9} = \frac{5}{9} + y^2$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{5}{9} + y^2 & 0 < y < \frac{2}{3} \\ 1 & y \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_Y = \{y: P(Y = y) > 0\} = \{0\} \neq \emptyset;\ P(Y = 0) = \frac{2}{3} < 1$$

$\Rightarrow Y$ é uma variável aleatória mist

4. Seja a variável aleatória X contínua, com função distribuição $F_X(x)$ simétrica em relação à média μ . Mostre que $P(\,|X - \mu| > \varepsilon\,) = 2 - 2F_X(\mu + \varepsilon\,)$.

$$P(\,|X - \mu| > \varepsilon\,) = 1 - P(|X - \mu| \leq \varepsilon) = 1 - P(-\varepsilon \leq X - \mu \leq \varepsilon)$$

$$= 1 - P(\mu - \varepsilon \leq X \leq \mu + \varepsilon)$$

$$= 1 - [F_X(\mu + \varepsilon) - F_X(\mu - \varepsilon)]$$

$$= 1 - \{F_X(\mu + \varepsilon) - [1 - F_X(\mu + \varepsilon)]\} = 2 - 2F_X(\mu + \varepsilon)$$